Universidad Simón Bolívar.
Matemáticas II (MA-1112).
Enero – marzo 2013.
christianlaya@hotmail.com ; @ChristianLaya

Tercer examen parcial (40%)
Tipo B (3-4)

1. *Calcule la siguiente integral:*

$$\int_0^{\ln(2)} (1+\ln(\cosh(x)))^2 tgh(x)dx$$

Solución:

Tenemos lo siguiente:

$$\int_0^{\ln(2)} (1+\ln(\cosh(x)))^2 tgh(x)dx = \int_0^{\ln(2)} \frac{(1+\ln(\cosh(x)))^2 senh(x)}{\cosh(x)}dx$$

Hacemos un cambio de variable: $u=\cosh(x) \Longrightarrow du = senh(x)dx$

$$= \int_1^{\cosh(\ln(2))} \frac{(1+\ln(u))^2}{u}du = \int_1^{\cosh(\ln(2))} \frac{1+2\ln(u)+(\ln(u))^2}{u}du$$

$$= (\ln|u| + 2(\ln|u|)^2 + (\ln|u|)^4)\Big|_1^{\cosh(\ln(2))}$$

$$= \ln|\cosh(\ln(2))| + 2(\ln|\cosh(\ln(2))|)^2 + (\ln|\cosh(\ln(2))|)^4$$

2. *Halle la pendiente de la recta tangente a* $f(x) = x^{tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ *en el punto* $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Solución:

Para hallar la pendiente de la recta tangente a la función debemos hallar la primera derivada de f:

$$y = x^{tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \Longrightarrow \ln(y) = tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(x) \Longrightarrow \frac{y'}{y} = \sec^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\ln(x) + \left(\frac{1}{x}\right)tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$\Longrightarrow y' = y\left(\sec^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\ln(x) + \left(\frac{1}{x}\right)tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$$

$$\Longrightarrow y' = f'(x) = m = x^{tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\left(\sec^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\ln(x) + \left(\frac{1}{x}\right)tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$$

Sustituimos los valores de "x" en la ecuación y obtenemos el valor de la pendiente:

$$m = f'\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{tg\left(\frac{\pi}{4}\right)} \left(\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{2}\right)(-\ln(2)) + 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-\pi\ln(2) + 2) = \frac{-\pi\ln(2)}{2} + 1$$

3. *Calcule el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

<u>Solución</u>:

Si evaluamos $x = 0$ *obtenemos una indeterminación del tipo* 0^0. *Entonces:*

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)}$$

Resolvemos el límite por separado:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

Si evaluamos $x = 0$ *obtenemos una indeterminación del tipo* ∞/∞. *Aplicamos L' Hopital:*

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

4. *Calcule el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1+x)}$$

<u>Solución</u>:

Si evaluamos $x = 0$ *obtenemos una indeterminación del tipo 0/0. Aplicamos L' Hopital:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x\ln(2)}{\frac{1}{\frac{1}{1+x}}} = \lim_{x\to 0} 2^x\ln(2)(1+x) = 2^0\ln(2)(1) = \ln(2)$$

5. *Averigüe si la integral impropia:*

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx$$

Converge o diverge, en caso de que sea convergente, halle su valor.

Solución:

Tenemos que:

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} xe^{-x}dx$$

Resolvemos la indefinida:

$$u = x \Longrightarrow du = dx, \qquad dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$$

$$\Longrightarrow \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(-x-1)$$

Evaluamos:

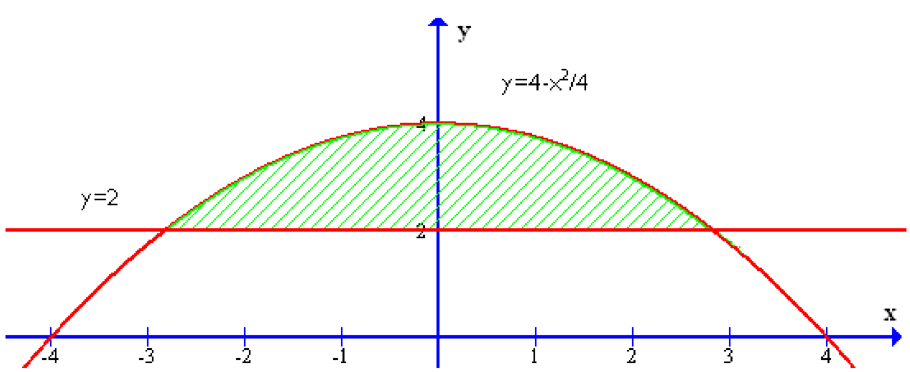
$$\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b}(-b-1)+1\right) = \lim_{b\to+\infty}\frac{x+1}{e^{x}}+1 = -\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}+1 = 1$$

El límite existe y, por ende, diremos que la integral dada converge a 1.

6. *Determine el volumen del sólido que se genera al rotar las gráficas de las funciones* $4-\frac{x^2}{4}$ *y* $y=2$ *alrededor del eje X.*

Solución:

Graficamos la región:



Resolvemos mediante el método de arandelas:

Hallamos la intercepción:

$$4 - \frac{x^2}{4} = 2 \Longrightarrow \frac{x^2}{4} = 2 \Longrightarrow x^2 = 8 \Longrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

El volumen será:

$$V(R) = \pi \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (x)\left(\left(4 - \frac{x^2}{4}\right)^2 - (2)^2\right) dx = \frac{448\sqrt{2}}{15}\pi$$